الدوال الأصلية

1- **تعريف:** إذا كانت الدالة f معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$.

نقول أن F دالة أصلية للدالة f إذا حققت $F'=f$ في المجال I .

مثال:

f و F دالتين عدديتين حيث: $f(x)=3x^2-2x+\cos x$ و $F(x)=x^3-x^2+\sin x$. تحقق أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f في $\mathbb{R}$.

ثم عين داله أخرى أصلية للدالة f .

مبرهنة01: كل دالة مستمرة على مجال هي تقبل دوال أصلية على هذا المجال.

مبرهنة02: لتكن F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال I .

فإن الفرق بينهما ثابت حقيقي أي : من أجل كل عدد x من المجال I

$F(X)=G(X)+c$ .... $(c\in\mathbb{R})$.

البرهان: 2

2- الدالة الأصلية لدالة تأخذ قيمة معينة من أدل قيمة للمتغير x:

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على المجال I. وليكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$.

توجد دالة وحيدة F دالة أصلية للدالة f تحقق الشرط : $F(x_0)=y_0$.

مثال:

-1 $f(x)=\sin x$ عين الدالة الأصلية لها في $\mathbb{R}$ التي تحقق $F(\pi)=0$.

-2 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ عين الدالة الأصلية لها في $\mathbb{R}$ التي تحقق $F(0)=2$.

3- الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة f	الدالة الأصلية F و c ثابت	المجال I
$f(x)=K$ (K ثابت)	$F(x)=Kx+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$F(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n..(n\in z^*,n\neq-1)$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$ و $n\succ 0$. $\mathbb{R}_+^*$ او $\mathbb{R}_-^*$ $n\leq-2$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=-\tan x+c$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x+c$	$]0;+\infty[$

أمثلة: عين الدالة الأصلية للدالة f حسب كل حالة:

1) $f(x)=x^5$ 2) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$ 3) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ 4) $f(x)=tan^2x$

5) $f(x)=2\sin(2x)+3\cos(2x)+4$.

4- عمليات على الدوال الأصلية:

u و v دالتين مستمرتين في المجال I.

الشروط	الأصلية	الدالة
	$u+v$	$u'+v'$
	Ku	Ku' و K ثابت
$u \neq 0$ في I عند: $n \leq 0$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u'u^{n}$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$
$u \succ 0$ في I	$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$v \neq 0$ في I	$-\frac{1}{v}$	$\frac{v'}{v^{2}}$
	$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$
$u(x) \neq 0$	$\ln\lvert u \rvert + c$	$\frac{v'}{v}$
	$e^{u}+c$	$u'e^{u}$
	$\sin u + c$	$u'\cos u$
	$-\cos u + c$	$u'\sin u$

أمثلة:

عين الدالة الأصلية للدالة f حسب كل حالة:

1) $f(x) = \frac{x^{3}+3x+1}{3}$ في $\mathbb{R}$

2) (2 $f(x) = 1 - \frac{2}{x^{3}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ في $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

3) $f(x) = \frac{x+1}{(x^{2}+2x+7)^{3}}$ في $\mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x + 1}}$ في $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

5) $f(x) = \sin^{2} x$. في $\mathbb{R}$.

6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ في $]0 ; +\infty[$.

5- تمارين

التمرين01: F دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعلاقة: $F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ ثم ماذا تستنتج ؟.

التمرين02:

1- عين الدالة الأصلية لكل دالة مما يلي: $f(x) = x^{4} - 3x^{2} + 3x - 1$ و $g(x) = x(x^{2}+1)^{2}$ و $h(x) = \frac{\sin x}{\cos^{2} x}$ و $k(x) = \sin^{4} x \times \cos^{3} x$.

2- لتكن الدالة العددية F المعرفة في $]0 ; +\infty[$: $F(x) = x\ln x - x$. برهن أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة $(\ln)$. ثم استنتج دالة أصلية للدالة L في $]0 ; +\infty[$ حيث: $L(x) = 8\ln x - 4x + 4$.

التمرين03: لدينا الدالة f المعرفة في $]0 ; 1[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x-1}{x^{2}(x-1)^{2}}$

1- عين العددين الحقيقيين a و b علما أن: $f(x) = \frac{a}{x^{2}} + \frac{b}{(x-1)^{2}}$.

2- استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0 ; 1[$ و تحقق: $F(\frac{1}{2}) = 6$.

التمرين04: لدينا الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$

g دالة المعرفة في $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = 1 - f(x)$.

1- احسب دالة أصلية للدالة g في $\mathbb{R}$.

2- استنتج دالة أصلية للدالة f في $\mathbb{R}$.

التمرين05: لدينا الدالة f المعرفة في $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x^{2}-x-1}{4x-6}$

1- عين الأعداد الحقيقية a و b و c علما أن: $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x-6}$.

2- استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$.